Correction de l'exercice du 12 décembre 2012

Olivier BRANDOUY

December 14, 2012

1 Rappel des données de base :

La rentabilité du Marché ($ERM = 0.17$), celle de l'actif sans risque $rf = 0.05$. On sait par ailleurs que $\sigma_M = 0.25$ Questions:

1. Quel portefeuille P1, composé à partir du portefeuille de marché et de l'actif sans risque peut engendrer une rentabilité de 15% ?

2. Un investisseur dont la fonction d'utilité est $U(E(R), \sigma^2) = E(R) - \frac{1}{2}A\sigma^2$ et dont le coefficient d'aversion au risque est $A = 4$ sera-t-il satisfait par P1 ?

3. Quelles sont les proportions de risque systématique et spécifique dans P1 ?

4. Si l'investisseur, plutôt que de choisir P1, se diversifie mal et opte pour le portefeuille suivant : 16.66% dans le taux sans risque, 80% dans le portefeuille de marché et 3.34% dans un actif X (qui lui même appartient au portefeuille de marché), quelles sont les proportions de risque systématique et spécifique dans P3 ? Comparez à P1 et commentez

5. Même question avec P4 combinant également rf, le portefeuille de marché et X mais dans les proportions suivantes : 16.66% dans le taux sans risque, 40% dans le portefeuille de marché et 43.34% dans X ?

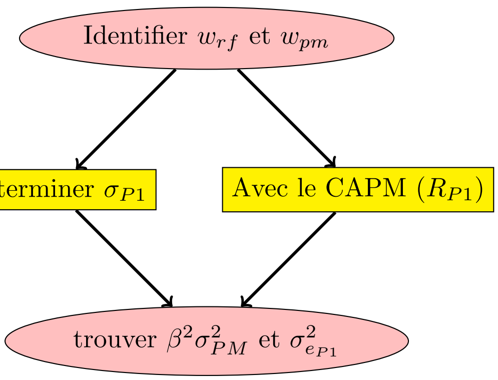
Résultats générés avec R, initialisation des calculs

Ces instructions ne servent qu'à instancier le problème.

```
R> ERM <- 0.17
R> sM <- 0.25
R> rf <- 0.05
```

Question 1

Soient wrf et wpm les poids caractérisant les investissements dans l'actif sans risque et dans le portefeuille de marché.



On sait que $0.15 = 0.05wrf + 0.17wpm$ et que $wpm = 1 - wrf$. Il vient que :

```
R> ERP1 <- 0.15
R> wrf <- (ERP1 - ERM)/(rf - ERM)
R> wpm <- 1 - wrf
R> c(wrf, wpm)
```

On peut calculer alors la volatilité de P1

```
R> sP1 <- wpm * sM
R> sP1^2
```

Par ailleurs, en utilisant la relation du CAPM ou la formule du bêta du portefeuille, on peut cacluler β_{P1} qui ici est égal à :

```
R> betaP1 <- wrf * 0 + wpm * 1
R> betaP1
```

On peut alors montrer simplement que la fraction de risque systématique dans σ^2_{P1} est de 100%:

```
R> betaP1^2 * sM^2/sP1^2
```

Question 2

On détermine le poids $wOPT$ pour un investisseur présentant une aversion au risque = 4 :

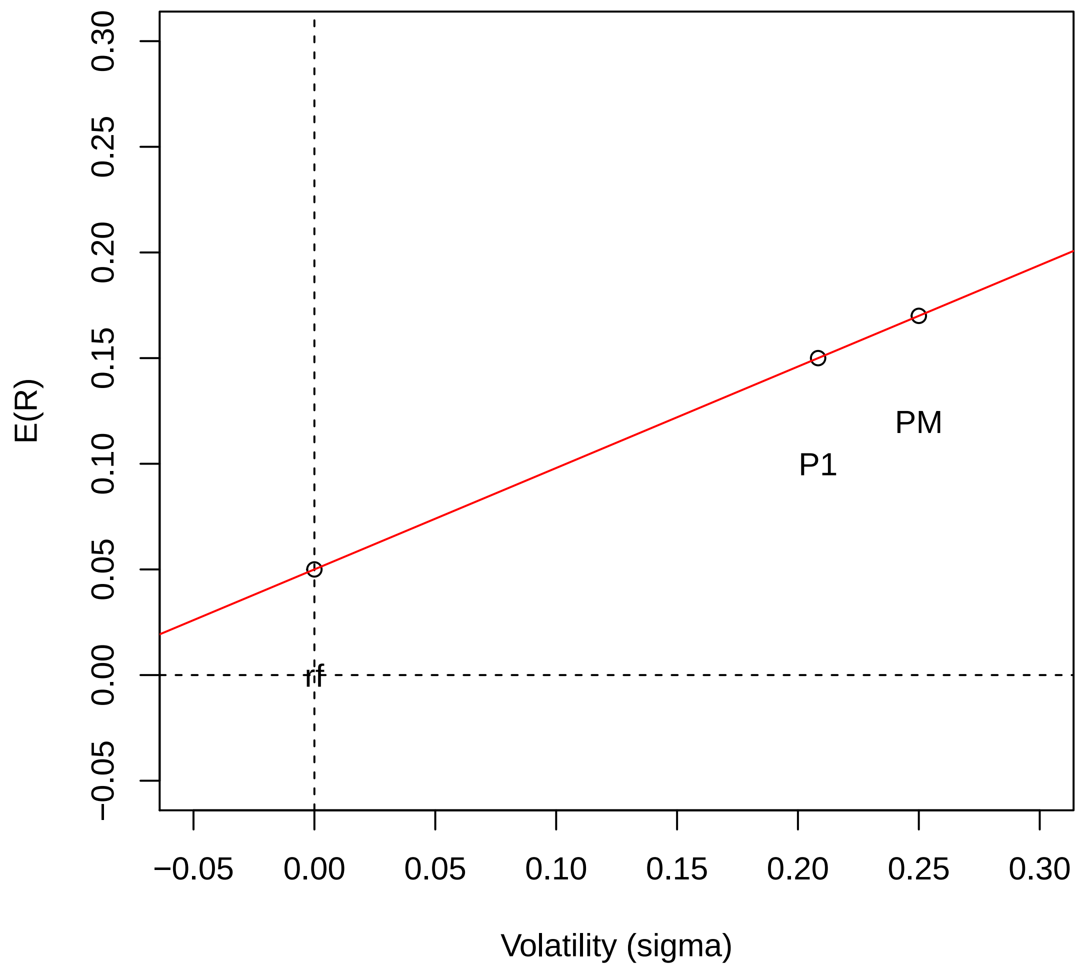


Figure 1: CML et P1

```
R> A <- 4
R> wOPT <- (ERM - rf)/(A * sM^2)
R> wrf <- 1 - wOPT
R> P2 <- c(wrf, wOPT)
R> P2
```

On voit que cet investisseur ne sera pas intéressé par P1. P1 ne lui aurait plû que si son coefficient d'aversion au risque avait été égal au wrm précédemment calculé (0.83333) :

```
R> A <- (ERM - rf)/(wpm * sM^2)
R> A
```

Question 3

On sait que

```
R> rhoMX <- 0.65
R> sX <- 0.3
```

On peut en déduire le bêta de X:

```
R> betaX <- (rhoMX * sX * sM)/sM^2
R> betaX
```

Et par conséquent l'espérance de rentabilité de X (par application du CAPM):

```
R> ERX <- rf + betaX * (ERM - rf)
R> ERX
```

Ainsi que la part de risque systématique de X :

```
R> betaX^2 * sM^2/sX^2
```

Si on compose un portefeuille P3 ainsi :

```
R> P3 <- c(0.166666, 0.8, 0.033333)
```

Alors le β_{P3} est égal à :

```
R> betaP3 <- P3 %*% as.matrix(c(0, 1, betaX))
R> betaP3
```

On peut calculer alors son espérance de rentabilité en utilisant la relation du CAPM:

```
R> ERP3 <- rf + betaP3 * (ERM - rf)
R> ERP3
```

Il faut alors calculer la variance du portefeuille (et là, il y a une erreur de calcul au tableau !); je commente le code :

```
R> corMat <- matrix(c(1, 0, 0, 0, 1, 0.65, 0, 0.65, 1), 3, 3)
R> corMat
```

Le vecteur des volatilités (même ordre)

```
R> volVec <- c(0, 0.25, 0.3)
```

Ce qui me donne la matrice de variance covariances suivante :

```
R> covMat <- matrix(NA, 3, 3)
R> for (i in 1:3) for (j in 1:3) covMat[i, j] <- corMat[i, j] *
+     volVec[i] * volVec[j]
R> covMat
```

Bien, maintenant on peut, après avoir créé une fonction pour aller plus vite, calculer la variance du portefeuille P3:

```
R> varP <- function(w, A) {
+     w %*% A %*% as.matrix(w)
+ }
R> varP3 <- varP(P3, covMat)
R> sP3 <- sqrt(varP3)
R> varP3
```

On voit que P3 n'est plus sur la CML (avec des yeux de lynx, mais c'est indiscutable):

On peut recalculer la part de risque systématique dans P3 :

```
R> betaP3^2 * sM^2/varP3
```

On constate que cette part est bien réduite, mais non nulle (oui, il y avait bien une erreur dans les calculs au tableau!)

Il est intéressant de se demander quel trade-off on fait en choisissant P3. Je m'explique : pour le même niveau de risque que porte P3, quel eû été la rentabilité d'un portefeuille otimal ?

```
R> rf + sP3 * (ERM - rf)/sM
```

Soit un delta :

```
R> delta1 <- (rf + sP3 * (ERM - rf)/sM) - ERP3
R> delta1
```

Une autre question serait alors, pour le même niveau de rentabilité que P3, à quel niveau de risque arriverait-on sur la CML ?

```
R> (ERP3 - rf) * (sM/(ERM - rf))
```

Soit ici un delta de :

```
R> delta2 <- sP3 - (ERP3 - rf) * (sM/(ERM - rf))
R> delta2
```

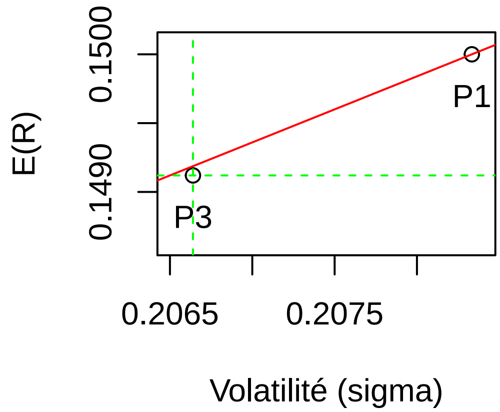


Figure 2: CML, P1 et P3

Question 4

Clairement, si on crée un nouveau portefeuille P4 qui contient beaucoup plus de X alors oui, on va s'éloigner de façon importante de la CML :

```
R> P4 <- c(0.1666, 0.4, 0.4333)
R> varP4 <- varP(P4, covMat)
R> varP4
R> sP4 <- sqrt(varP4)
R> betaP4 <- P4 %*% as.matrix(c(0, 1, betaX))
R> betaP4
R> ERP4 <- rf + betaP4 * (ERM - rf)
R> ERP4
```

On voit ici que la situation est bien plus nette vis à vis de la CML:

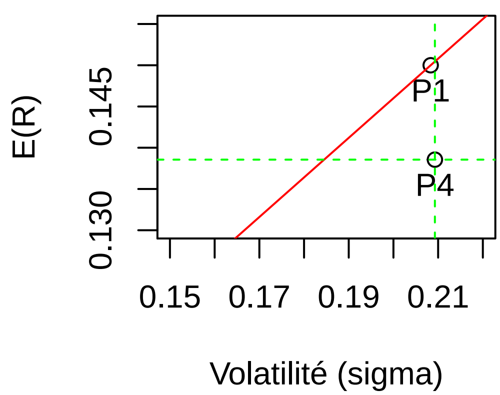


Figure 3: CML, P1 et P3